

绵阳市高中 2022 级第一次诊断性考试

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的班级、姓名、考号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题, 共 58 分)

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | (x+1)^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{-2, -1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $[-2, 0]$ D. $[-2, 2]$
2. “ $ac^2 > bc^2$ ”是“ $a > b$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知 $x > 0, y > 0$, 且满足 $x + y = xy - 3$, 则 xy 的最小值为
 A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. 6 D. 9
4. 某公司根据近几年经营经验, 得到广告支出与获得利润数据如下:

广告支出 x /万元	2	5	8	11	15	19
利润 y /万元	33	45	50	53	58	64

根据表中数据可得利润 y 关于广告支出 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 1.65x + \hat{a}$. 据此经验回归方程, 若计划利润达到 100 万元, 估计需要支出广告费

- A. 30 万元 B. 32 万元 C. 36 万元 D. 40 万元
5. 下列选项中, 既是增函数, 也是奇函数的是
 A. $y = x^{-2}$ B. $y = x + \frac{1}{x}$ C. $y = x - \sin x$ D. $y = \ln \frac{x-1}{x+1}$
 6. 已知 θ 为第一象限角, 且 $\tan(\theta + \frac{\pi}{3}) + \tan \theta = 0$, 则 $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} =$
 A. 9 B. 3 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{9}$

7. 某工厂产生的废气(经过滤后)排放, 过滤过程中废气的污染物含量 P (单位: mg/L) 与时间 t (单位: h) 间的关系为 $P = P_0 e^{-kt}$ (e 是自然对数的底数, P_0, k 为正的常数). 如果前 9h 消除了 20% 的污染物, 那么消除 60% 的污染物需要的时间约为 () (参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$)
 A. 33h B. 35h C. 37h D. 39h

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -3(x+1)^2, & x \leq 0, \\ e^x(x^2 - 3), & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = mx$, 若关于 x 的不等式 $x(f(x) - g(x)) < 0$ 的整数

解有且仅有 2 个, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(0, \frac{3}{2}]$ B. $(0, \frac{e^2}{2}]$
 C. $(-2e, 0]$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{3}{2}]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 6, a_{n+1} = S_n + 6$, 则
 A. $S_3 = 42$ B. $S_n < 2a_n$
 C. $\{S_n\}$ 是等比数列 D. 存在大于 1 的整数 n, k , 使得 $S_n = a_k$
10. 已知函数 $f(x) = 2\sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} (\omega > 0)$ 在 $[0, \pi)$ 上有且仅有 4 个零点, 则
 A. $\omega \in (\frac{11}{3}, \frac{14}{3}]$
 B. 令 $g(x) = f(x + \frac{\pi}{6})$, 存在 ω , 使得 $g'(x)$ 为偶函数
 C. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上可能有 3 个或 4 个极值点
 D. 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{35}, \frac{\pi}{35})$ 上单调递增
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(x)$ 不恒为 0, 且 $\frac{f(x) + f(y)}{2} = f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$, 则
 A. $f(0)$ 可以等于零 B. $f(x)$ 的解析式可以为: $f(x) = \cos 2x$
 C. 曲线 $f(x-1)$ 为轴对称图形 D. 若 $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{20} f(k) = 20$

第 II 卷 (非选择题, 共 92 分)

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b=2, c=3, \cos(B+C)=-\frac{2}{3}$,

则 $a=$ _____.

13. 已知函数 $f(x)=|\ln|x+2||-m$, m 为正的常数, 则 $f(x)$ 的零点之和为_____.

14. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-3)e^x+a(\frac{1}{2}x^2-2x)$ 的极大值点, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

近年来, 解放军强军兴军的深刻变化, 感召了越来越多的高中优秀青年学子献身国防, 投身军营. 2024 年高考, 很多高考毕业学生报考了军事类院校. 从某地区内学校的高三年级中随机抽取了 900 名学生, 其中男生 500 人, 女生 400 人, 通过调查, 有报考军事类院校意向的男生、女生各 100 名.

(1) 完成给出的列联表, 并分别估计该地区高三男、女学生有报考军事类院校意向的概率:

	有报考意向	无报考意向	合计
男学生			
女学生			
合计			

(2) 根据小概率值 $\alpha=0.10$ 的独立性检验, 能否认为学生有报考军事类院校意向与性别有关.

参考公式及数据: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

α	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
χ_α^2	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

16. (15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin C = \frac{1}{2}$, 且 $a \cos C + c \cos A = 1$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $B = \frac{\pi}{4}$, 求 A .

17. (15 分)

已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $(n+1)a_n = nb_n$, 且 a_{n+1} 是 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项.

(1) 若 $a_1 + a_2 = 4$, 求 b_1 的值;

(2) 若 $a_1 = 2$, 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n .

(i) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(ii) 求 $T_n - S_n$.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x - 1$.

(1) 当 $a = -5$ 时, 则过点 $(0, 2)$ 的曲线 $f(x)$ 的切线有几条? 并写出其中一条切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(x)$ 有唯一零点, 求实数 a 的取值范围.

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 3x + a$, $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值为 $\frac{3}{4} - \ln 2$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n a_{n+1} = f(a_n) + 3a_n - 1$, 且 $a_1 = \frac{4}{3}$.

(i) 当 $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ 时, 比较 a_n 与 1 的大小, 并说明理由;

(ii) 求证: $3 \sum_{i=1}^n |1 - a_i| < 2$.