

南充市高 2025 届高三适应性考试（一诊）

数学参考答案及评分意见

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	D	A	B	C	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9	10	11
ACD	BD	ABC

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $\frac{1}{2}$

13. 8

14. $2\sqrt{6}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 【解析】

(1) 由 $\sin 2A = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$ ，得 $\sin 2A = \sin(B+C)$ ，即 $2\sin A \cos A = \sin A$ ，

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$ 3 分

又因为 $A \in (0, \pi)$ ，

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 由 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，得 $\frac{1}{2}bc \sin A = 2\sqrt{3}$ ，

解得 $bc = 8$ 7 分

又 $b = 2c$ ，

可得 $b = 4$ ， $c = 2$ 9 分

由余弦定理，得

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A = c^2 + b^2 - bc = 12$ ， 11 分

解得 $a = 2\sqrt{3}$ ， $b + c = 6$ 。

所以 $a + b + c = 6 + 2\sqrt{3}$ 。

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 2\sqrt{3}$ 13 分

16. 【解析】

(1) 由题意得: $\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 2分

化简整理得: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 4分

所以曲线C的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 6分

(2) 延长 MF , 与曲线C相交于点 M' ,
由 $FM \parallel F'N$ 及椭圆的对称性知: $|F'N| = |FM'|$,

又 $|FM| + |F'N| = \frac{8}{7}\sqrt{2}$, 则 $|MM'| = \frac{8}{7}\sqrt{2}$, 8分

当直线 FM 的斜率不存在时, $|MM'| = \sqrt{2} \neq \frac{8}{7}\sqrt{2}$, 与题意不符; 10分

当直线 FM 的斜率存在时, 设 $FM: y = k(x-1)$, $M(x_1, y_1)$, $M'(x_2, y_2)$,

联立得: $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}$,

消y得: $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1+2k^2} \end{cases} \dots\dots\dots 12分$$

$$|MM'| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2 - 4 \frac{2k^2-2}{1+2k^2}} = \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2} = \frac{8}{7}\sqrt{2}$$

解得: $k = \pm\sqrt{3}$, 经检验, 符合题意,

所以直线 FM 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$ 15分

17. 【解析】

(1) $\because SA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore SA \perp BC$ 2分

又 $AB \perp BC$, $SA \cap AB = A$, $SA, AB \subset$ 平面 SAB ,

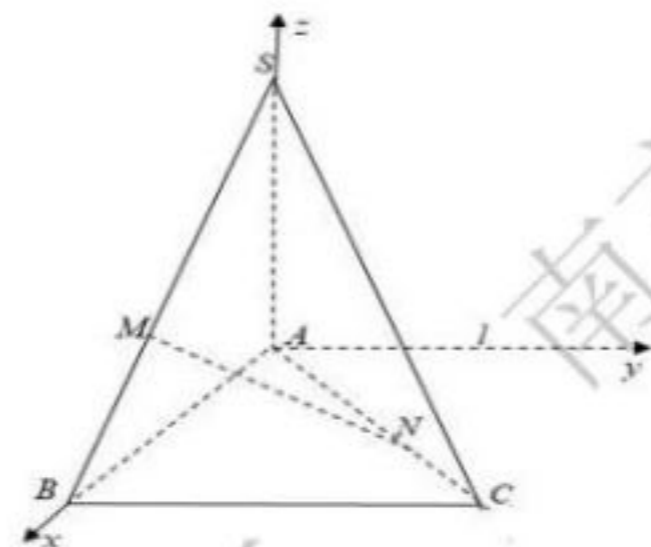
$\therefore BC \perp$ 平面 SAB 5分

(2) 过 A 作直线 $l \parallel BC$, 易证: AB, l, SA 两两相互垂直, 以 A 为坐标原点, AB, l, SA 分别为 x, y, z 轴, 建系如图所示空间直角坐标系:

则: $A(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $S(0,0,1)$,

$M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, 1 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$

..... 6分



所以 $|MN| = \sqrt{a^2 - \sqrt{2}a + 1} = \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}, 0 < a < \sqrt{2}$ 8分

因此当线段 MN 的长度最小时, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 9分

此时 $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AN} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$

设平面 AMN 的法向量为 $\vec{m} = (x_0, y_0, z_0),$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{AN} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}z_0 = 0 \\ \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 = 0 \end{cases}$$

令 $x_0 = -1$, 则 $\vec{m} = (-1, 1, 1)$ 12分

直线 SC 的方向向量为 $\overrightarrow{SC} = (1, 1, -1)$ 13分

设直线 SC 与平面 AMN 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{SC}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \vec{m}|}{\|\overrightarrow{SC}\| \|\vec{m}\|} = \frac{1}{3},$

所以直线 SC 与平面 AMN 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ 15分

18. 【解析】

(1) $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ 1分

$$f'(x) = \frac{(e^x)'x - e^x x'}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}, \text{2分}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$,3分

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况表为:

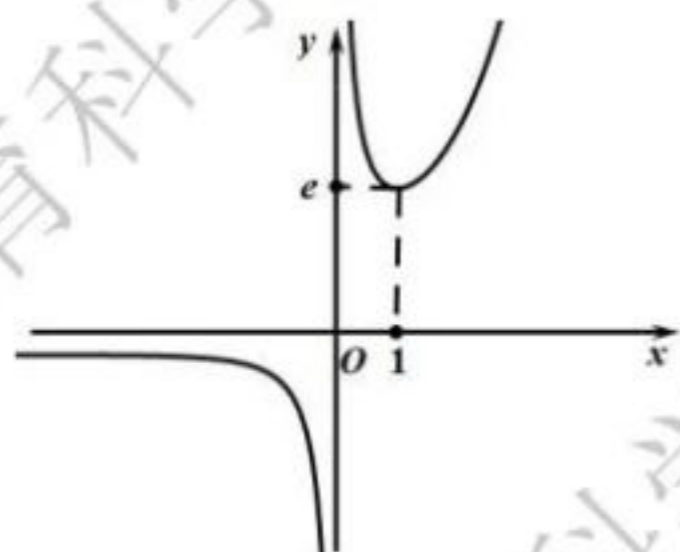
x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	单调递减	单调递减	e	单调递增

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增.

所以 $[f(x)]_{\text{极小值}} = f(1) = e, f(x)$ 有极小值 $f(1) = e$, 无极大值5分

(2) 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$. 若 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,
当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 若 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

根据以上信息画出 $f(x)$ 大致图像如下:



.....9分

方程 $f(x) = a (a \in R)$ 的解的个数为函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = a$ 的交点个数.....11分

由图可知,

当 $0 \leq a < e$ 时, $f(x) = a (a \in R)$ 的解为0个;

当 $a = e$ 或 $a < 0$ 时, $f(x) = a (a \in R)$ 的解为1个;

当 $a > e$ 时, $f(x) = a (a \in R)$ 的解为2个.12分

(3) 证明: 要证: $f(x) \geq x - \ln x + e - 1$,

只需证: $\frac{e^x}{x} - x + \ln x - e + 1 \geq 0$,14分

令 $t = \frac{e^x}{x}$, 则 $\ln t = x - \ln x$, 由 (1) 可知 $t \geq e$

只需证: $t - \ln t - e + 1 \geq 0$,15分

设 $g(t) = t - \ln t - e + 1 (t \geq e)$,

因为 $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0$ 在 $[e, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $g(t)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递增.

则 $g(t) \geq g(e) = 0$,16分

即原不等式得证.....17分

19. 【解析】

(1) 剔除周六数据得: $(\bar{y})_{\text{新}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{205 \times 6 - 90}{5} = 228$, $\sum_{i=1}^5 t_i y_i = 4004 - 6 \times 90 = 3464$

$\bar{t} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, $\sum_{i=1}^5 t_i^2 = 91 - 6^2 = 55$,2分

所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i y_i - 5\bar{t}(\bar{y})_{\text{新}}}{\sum_{i=1}^5 t_i^2 - 5(\bar{t})^2} = \frac{3464 - 5 \times 3 \times 228}{55 - 5 \times 3^2} = 4.4$,3分

故 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 228 - 4.4 \times 3 = 214.8$,4分

所以 y 关于的 t 经验回归方程为 $\hat{y} = 4.4t + 214.8$ 6分

(2) 由题意可知 $p_n = \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} p_{n-2} (n \geq 3)$ 8分

其中 $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$,

所以 $p_n + \frac{1}{3} p_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{3} p_{n-2} (n \geq 3)$,

又 $p_2 + \frac{1}{3} p_1 = \frac{7}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 1$,

所以数列 $\{p_n + \frac{1}{3} p_{n-1}\}$ 是首项为1的常数列, 故 $p_n + \frac{1}{3} p_{n-1} = 1 (n \geq 2)$,10分

所以 $p_n - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} (p_{n-1} - \frac{3}{4}) (n \geq 2)$, 又 $p_1 - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}$,

所以数列 $\{p_n - \frac{3}{4}\}$ 是以首项为 $-\frac{1}{12}$ ，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

故 $p_n - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} \times (-\frac{1}{3})^{n-1}$ ，即 $p_n = -\frac{1}{12} \times (-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times (-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4}$ 12分

(3) 由(2)可得，

当 n 为偶数时， $p_n = \frac{1}{4} \times (-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times (\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4} > \frac{3}{4}$ 单调递减，最大值为 $p_2 = \frac{7}{9}$ ；

当 n 为奇数时， $p_n = \frac{1}{4} \times (-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \times (\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}$ 单调递增，最小值为 $p_1 = \frac{2}{3}$ ；

综上：数列 $\{P_n\}$ 的最大值为 $\frac{7}{9}$ ，最小值为 $\frac{2}{3}$ 。14分

证明：对任意 $\varepsilon > 0$ 总存在正整数 $N_0 = \left\lceil \log_{\frac{1}{3}}^{(4\varepsilon)} \right\rceil + 1$ ，(其中 $[x]$ 表示取整函数)，

当 $n > \left\lceil \log_{\frac{1}{3}}^{(4\varepsilon)} \right\rceil + 1$ 时， $\left| p_n - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{1}{4} \times (-\frac{1}{3})^n \right| = \left| \frac{1}{4} \times (\frac{1}{3})^n \right| < \frac{1}{4} \times (\frac{1}{3})^{\log_{\frac{1}{3}}^{(4\varepsilon)}} = \frac{1}{4} \times 4\varepsilon = \varepsilon$ ，

所以数列 $\{P_n\}$ 收敛。17分